

Задача Д3

Механическая система состоит из однородных ступенчатых шкивов 1 и 2, обмотанных нитями, грузов 3 - 6, прикрепленных к этим нитям, и невесомого блока. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом M , приложенной к одному из шкивов. Силы трения отсутствуют.

Требуется определить ускорение груза, имеющего больший вес.

Схемы систем приведены в Таблице 1.

Данные общие для всех вариантов:

радиусы шкива 1: $R_1=0,2$ м; $r_1=0,1$ м; радиус инерции шкива $\rho_1=0,1$ м;

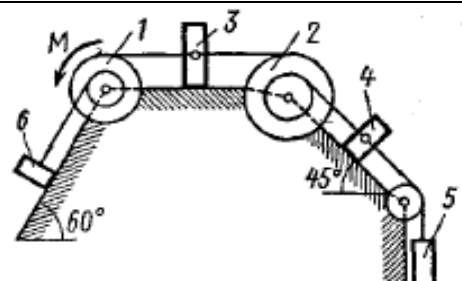
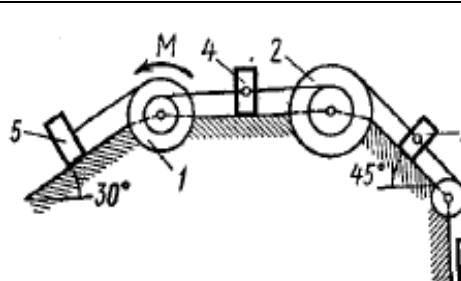
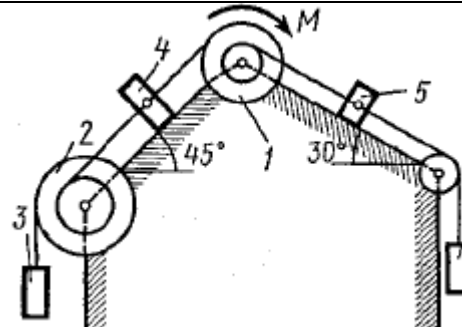
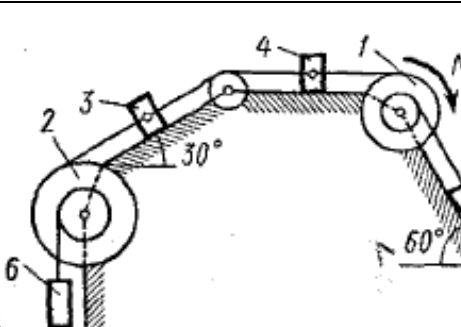
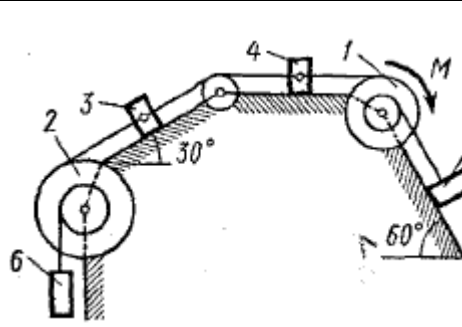
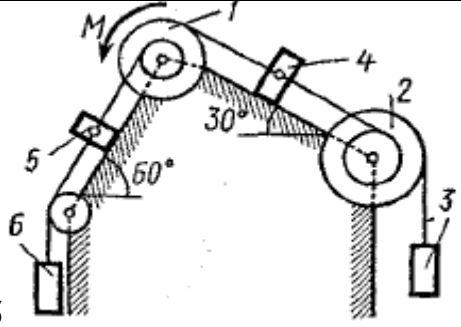
радиусы шкива 2: $R_2=0,3$ м; $r_2=0,15$ м; радиус инерции шкива $\rho_2=0,2$ м.

Численные значения других заданных величин приведены в Таблице 2.

На всех рисунках не изображать грузы, вес которых равен нулю; шкивы 1, 2 должны изображаться всегда, даже когда их вес равен нулю.

Вариант задания выбирается по последним двум цифрам зачетки: предпоследняя цифра – номер схемы (Таблица 1), последняя цифра – номер условия (Таблица 2). Например: №091365, механизм – 6, условие – 5.

Таблица 1. Схемы механических систем

 <p>Схема 0</p>	 <p>Схема 1</p>
 <p>Схема 2</p>	 <p>Схема 3</p>
 <p>Схема 4</p>	 <p>Схема 5</p>

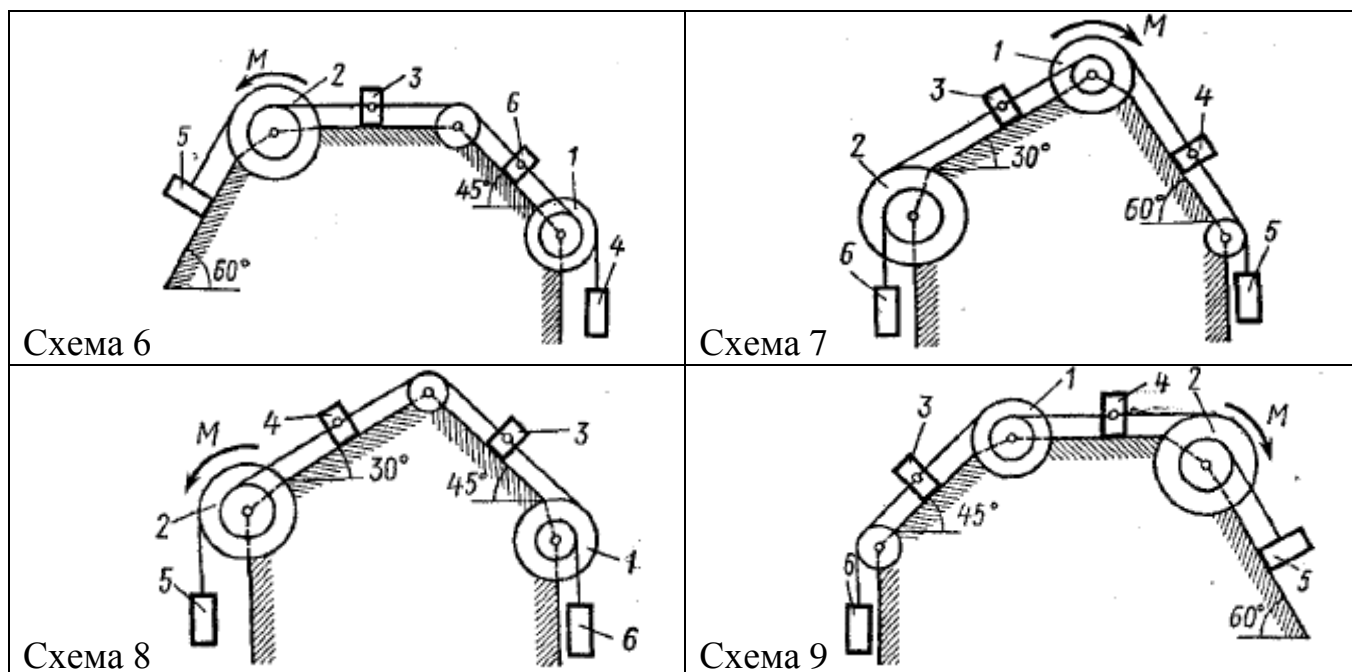


Таблица 2. Исходные данные

Номер условия	P_1, H	P_2, H	P_3, H	P_4, H	P_5, H	P_6, H	$M, H \cdot m$
0	10	0	20	30	40	0	10
1	0	40	0	10	20	30	12
2	20	30	40	0	10	0	16
3	0	20	10	30	0	40	18
4	30	0	20	0	40	10	12
5	0	10	30	40	20	0	16
6	40	0	0	20	30	10	10
7	10	20	0	40	0	30	18
8	0	40	10	0	30	20	12
9	30	30	40	20	10	0	16

Указания к решению задачи ДЗ

Это задача на применение общего уравнения динамики (принципа Даламбера — Лагранжа) к изучению движения механической системы. Ход решения задачи аналогичен ходу решения задачи Д2, только к действующим на систему активным силам надо добавить силы инерции.

Возможные (виртуальные) перемещения системы

Возможным называется перемещение точки из данного ее положения, допускаемое связями, наложенными на точку.

Возможное перемещение механической системы - совокупность элементарных (бесконечно малых) перемещений точек системы, которые допускаются наложенными на систему связями (при выведении системы из занимаемого в данный момент времени положения).

Число независимых между собой возможных перемещений механической системы называются *числом степеней свободы* этой системы.

Общее уравнение динамики (принцип Даламбера - Лагранжа)

При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0.$$

Порядок решения задач с помощью общего уравнения динамики для системы с одной степенью свободы:

- 1) изобразить на рисунке активные силы и реакции неидеальных связей (например, силы трения);
- 2) сделать предположение о направлении ускорений точек системы; выразить все ускорения через искомое;
- 3) направить на рисунке силы инерции в стороны, противоположные выбранным направлениям соответствующих ускорений;
- 4) записать алгебраические величины главных векторов и главных моментов сил инерции;
- 5) задать возможное перемещение одной из точек системы и выразить возможные перемещения точек приложения всех сил, включая силы инерции, через это возможное перемещение;
- 6) определить знаки работ активных сил и сил инерции в соответствии с их направлениями на рисунке и выбранными направлениями возможных перемещений точек системы
- 7) вычислить сумму работ всех сил, включая силы инерции, на возможных перемещениях точек системы;
- 8) составить общее уравнение динамики, приравняв вычисленную сумму работ нулю;
- 9) после сокращения полученного уравнения на заданное возможное перемещение определить искомое ускорение;

- 10) если найденное ускорение положительно, то сделанное предположение о направлении ускорений подтверждается, если отрицательно, то ускорения направлены в другую сторону

Приведение сил инерции твердого тела

1. Поступательное движение твердого тела

$$\bar{\Phi}^u = -M \bar{a}_C$$

при поступательном движении силы инерции твердого тела приводятся к главному вектору, проходящему через центр масс тела, главный момент равен нулю

2. Вращательное движение твердого тела вокруг оси, проходящей через центр масс

Пусть тело имеет плоскость материальной симметрии xSy и вращается вокруг оси z_C , перпендикулярной этой плоскости и проходящей через центр масс тела C .

$$\bar{\Phi}^u = 0$$

$$M_C^u = -J_{z_C} \varepsilon$$

в этом случае система сил инерции тела приводится к одной только паре с моментом M_C^u , лежащей в плоскости симметрии тела.

3. Плоскопараллельное движение твердого тела

Пусть тело имеет плоскость материальной симметрии и движется параллельно этой плоскости

$$\bar{\Phi}^u = -M \bar{a}_C$$

$$M_C^u = -J_{z_C} \varepsilon$$

система сил инерции тела приведет к главному вектору, приложенному в центре масс C тела, и паре сил равной главному моменту, лежащим в плоскости материальной симметрии тела.

Пример решения задачи

Исходные данные:

$P_1=0$; $P_2=20 \text{ Н}$; $P_3=10 \text{ Н}$; $P_4=30 \text{ Н}$; $P_5=40 \text{ Н}$; $P_6=0$; $M=10 \text{ Н м}$;

$R_1=0,4 \text{ м}$; $r_1=0,2 \text{ м}$; радиус инерции $\rho_1=0,05 \text{ м}$;

$R_2=0,5 \text{ м}$; $r_2=0,2 \text{ м}$; радиус инерции $\rho_2=0,1 \text{ м}$.

Определить a_5 .

Решение

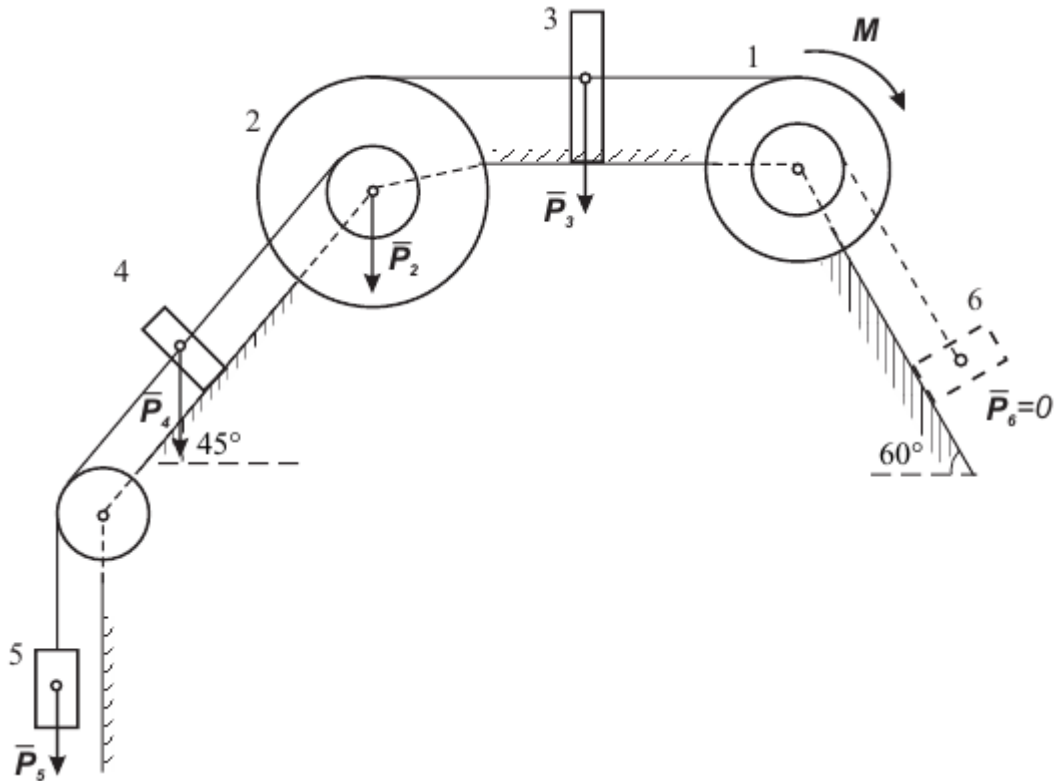


Рисунок 1. Система под действием активных сил

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Главные векторы и главные моменты сил инерции:

$$M_2^u = J_2 \varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2, \quad J_2 = m_2 \rho_2^2 = \frac{P_2}{g} \rho_2^2 - \text{момент инерции шкива 2}$$

$$F_3^u = m_3 a_3 = \frac{P_3}{g} a_3,$$

$$F_4^u = m_4 a_4 = \frac{P_4}{g} a_4,$$

$$F_5^u = m_5 a_5 = \frac{P_5}{g} a_5$$

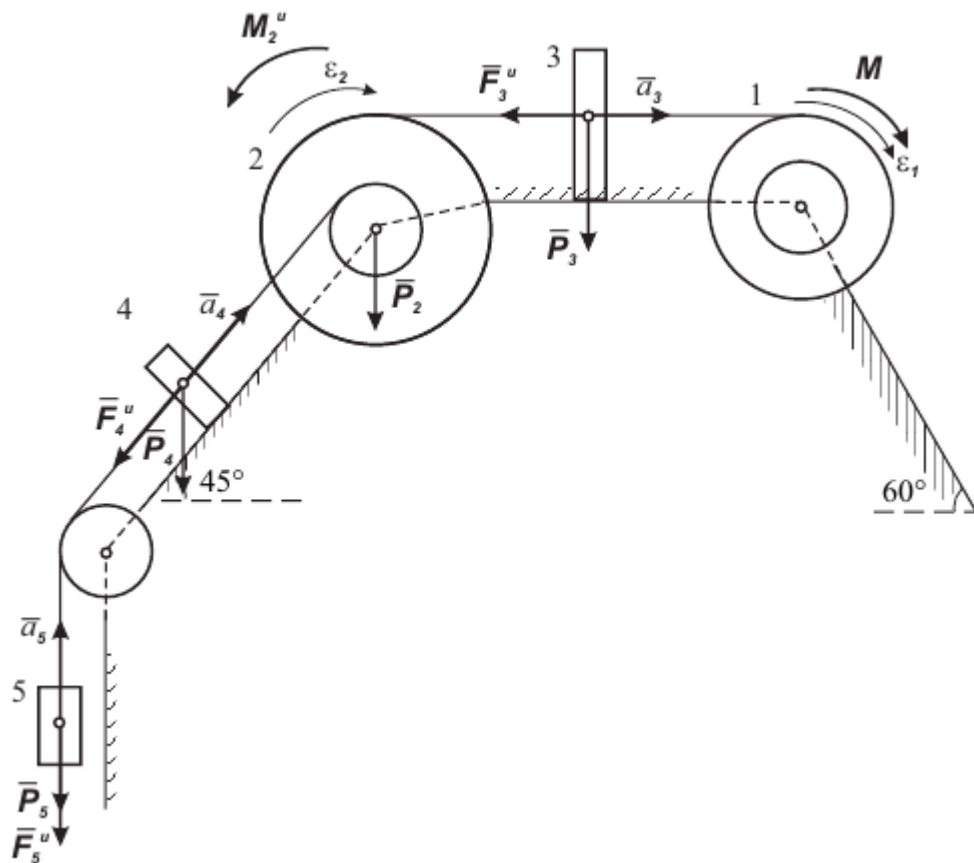


Рисунок 2. Ускорения и силы инерции

Определим соотношения между ускорениями, все ускорения выражаем через искомое ускорение a_5 :

$$a_4 = a_5$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_4}{r_2} = \frac{a_5}{r_2}$$

$$a_3 = \varepsilon_2 \cdot R_2 = \frac{R_2}{r_2} a_5 \quad (1)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{a_3}{R_1} = \frac{R_2}{r_2 R_1} a_5$$

Сообщим системе возможное перемещение.

Выразим все перемещения через δs_5 (система с одной степенью свободы). Соотношения между возможными перемещениями аналогичны соотношениям между ускорениями:

$$\delta s_4 = \delta s_5$$

$$\delta \varphi_2 = \frac{\delta s_4}{r_2} = \frac{\delta s_5}{r_2}$$

$$\delta s_3 = \delta \varphi_2 \cdot R_2 = \frac{R_2}{r_2} \delta s_5$$

$$\delta \varphi_1 = \frac{\delta s_3}{R_1} = \frac{R_2}{r_2 R_1} \delta s_5$$

(2)

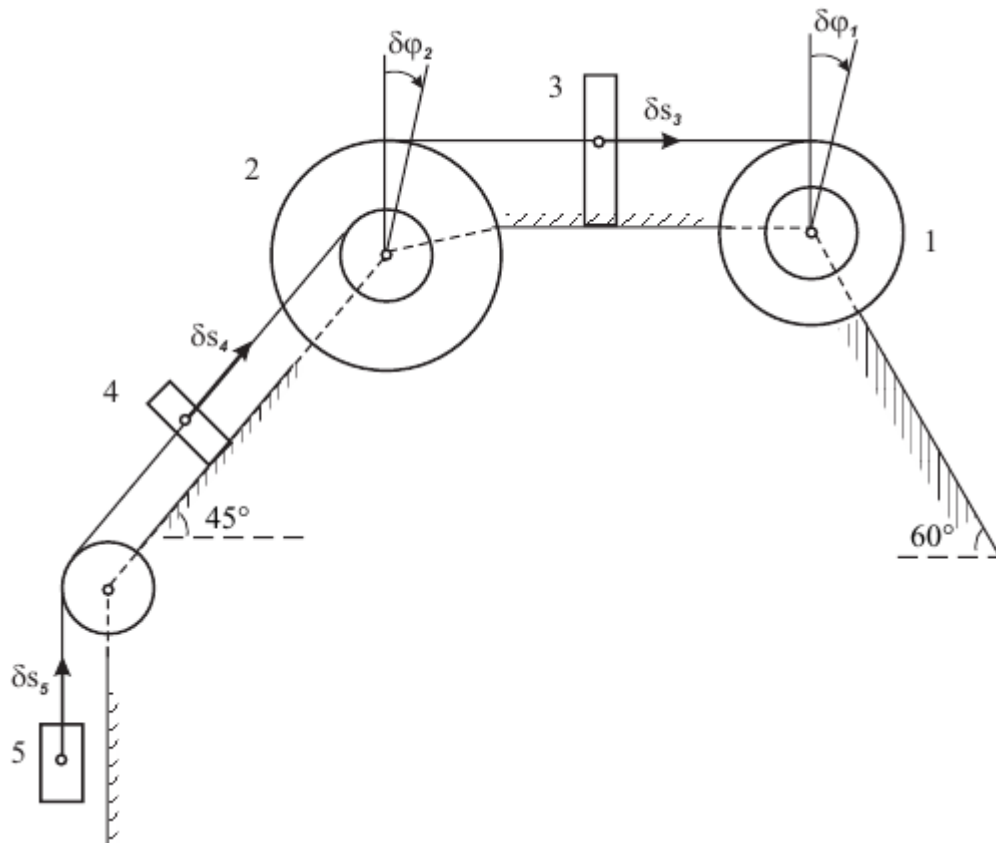


Рисунок 3. Возможное перемещение системы

Вычислим элементарную работу активных сил на возможном перемещении системы:

$$\sum \delta A_k^a = \delta A_M + \delta A_{P_4} + \delta A_{P_5}$$

$$\delta A_M = M \cdot \delta \varphi_1$$

$$\delta A_{P_4} = -P_4 \cdot \delta s_4 \cos 45^\circ$$

$$\delta A_{P_5} = -P_5 \cdot \delta s_5$$

(3)

Вычислим элементарную работу сил инерции на возможном перемещении системы:

$$\begin{aligned}
\Sigma \delta A_k^u &= \delta A_{M_2^u} + \delta A_{F_3^u} + \delta A_{F_4^u} + \delta A_{F_5^u} \\
\delta A_{M_2^u} &= -M_2^u \cdot \delta \varphi_2 = -\frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2 \cdot \delta \varphi_2 \\
\delta A_{F_3^u} &= -F_3^u \cdot \delta s_3 = -\frac{P_3}{g} a_3 \cdot \delta s_3 \\
\delta A_{F_4^u} &= -F_4^u \cdot \delta s_4 = -\frac{P_4}{g} a_4 \cdot \delta s_4 \\
\delta A_{F_5^u} &= -F_5^u \cdot \delta s_5 = -\frac{P_5}{g} a_5 \cdot \delta s_5
\end{aligned} \tag{4}$$

Тогда общее уравнение динамики примет вид:

$$\delta A_M + \delta A_{P_4} + \delta A_{P_5} + \delta A_{M_2^u} + \delta A_{F_3^u} + \delta A_{F_4^u} + \delta A_{F_5^u} = 0$$

С учетом соотношений (3,4) получим

$$\begin{aligned}
M \cdot \delta \varphi_1 - P_4 \cdot \delta s_4 \cos 45^\circ - P_5 \cdot \delta s_5 - M_2^u \cdot \delta \varphi_2 - F_3^u \cdot \delta s_3 - F_4^u \cdot \delta s_4 - F_5^u \cdot \delta s_5 &= 0 \\
M \cdot \delta \varphi_1 - P_4 \cdot \delta s_4 \cos 45^\circ - P_5 \cdot \delta s_5 - \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2 \cdot \delta \varphi_2 - \frac{P_3}{g} a_3 \cdot \delta s_3 - \frac{P_4}{g} a_4 \cdot \delta s_4 - \frac{P_5}{g} a_5 \cdot \delta s_5 &= 0
\end{aligned}$$

С учетом соотношений (1,2) получим

$$\begin{aligned}
M \cdot \frac{R_2}{r_2 R_1} \delta s_5 - P_4 \cdot \delta s_5 \cos 45^\circ - P_5 \cdot \delta s_5 - \\
- \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2 \cdot \frac{\delta s_5}{r_2} - \frac{P_3}{g} a_3 \cdot \frac{R_2}{r_2} \delta s_5 - \frac{P_4}{g} a_4 \cdot \delta s_5 - \frac{P_5}{g} a_5 \cdot \delta s_5 &= 0 \\
M \cdot \frac{R_2}{r_2 R_1} \delta s_5 - P_4 \cdot \delta s_5 \cos 45^\circ - P_5 \cdot \delta s_5 - \\
- \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \frac{a_5}{r_2} \cdot \frac{\delta s_5}{r_2} - \frac{P_3}{g} \frac{R_2}{r_2} a_5 \cdot \frac{R_2}{r_2} \delta s_5 - \frac{P_4}{g} a_5 \cdot \delta s_5 - \frac{P_5}{g} a_5 \cdot \delta s_5 &= 0
\end{aligned}$$

$$\left(M \cdot \frac{R_2}{r_2 R_1} - P_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - P_5 - \frac{P_2}{g} \cdot \left(\frac{\rho_2}{r_2} \right)^2 a_5 - \frac{P_3}{g} \left(\frac{R_2}{r_2} \right)^2 a_5 - \frac{P_4}{g} a_5 - \frac{P_5}{g} a_5 \right) \cdot \delta s_5 = 0$$

Приравняем нулю выражение в скобках:

$$M \cdot \frac{R_2}{r_2 R_1} - P_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - P_5 - \frac{P_2}{g} \cdot \left(\frac{\rho_2}{r_2} \right)^2 a_5 - \frac{P_3}{g} \left(\frac{R_2}{r_2} \right)^2 a_5 - \frac{P_4}{g} a_5 - \frac{P_5}{g} a_5 = 0$$

$$M \cdot \frac{R_2}{r_2 R_1} - P_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - P_5 = \left(P_2 \cdot \left(\frac{\rho_2}{r_2} \right)^2 + P_3 \cdot \left(\frac{R_2}{r_2} \right)^2 + P_4 + P_5 \right) \cdot \frac{a_5}{g}$$

$$a_5 = \frac{\left(M \cdot \frac{R_2}{r_2 R_1} - P_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - P_5 \right) \cdot g}{P_2 \cdot \left(\frac{\rho_2}{r_2} \right)^2 + P_3 \cdot \left(\frac{R_2}{r_2} \right)^2 + P_4 + P_5} = \frac{1,287}{137,5} \cdot g = 0,009 g = 0,009 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 = 0,092 \text{ м/с}^2$$

ОТВЕТ: $a_5 = 0,092 \text{ м/с}^2$